第5章　残された諸問題

5-2 切欠き部(応力集中部)をどう扱うか

■ 比べて選ぶ際の留意点

「物事を比較して判断する」事は日常茶飯の行為だ。

日常生活では、次は何をやろうか、どうやるべきか、など比較・判断の連続である。

その際、状況により人により意識の程度は在るにせよ、「何をやるべきか？」、「何を選ぶべきか？」に関しては、以下のステップを踏むに違いない。

先ず、判断する上での対象項目を幾つか上げる。次に、それらの順位をどうするか、比較要因を較べて判断する。こういう手順であろう。

例を上げよう。

「結婚したい候補が3人。それぞれ一長一短あり、だれを選ぶか？」

この場合、「対象項目」として候補者3名が上がる。「比較要因」は、評価判断する人の人格・性格にもよるだろうが、一般的には、容姿、年齢、学歴、年収、性格といった辺りか。そして、それぞれの候補者のその要因を吟味・比較して順位を決める、といった具合であろう。

こういういささか重いテーマを上げるまでもなく、人は何らかの方法で、要因を比較して判断しているものである。

対象が重要な事柄で、冷静に比較・判断したい場合などは、次の方法をお勧めしたい。

それは、それぞれの対象項目ごとの各比較要因に点数を付け、順位付けを行うことだ。

もっと簡便に相対比較したいなら、それぞれの要因に◎、○、△、×の四段階評価での順位付けによる比較を行う方法があり、これが有効かも知れない。

いずれの方法も、直観や情緒で選ぶより客観的な判断ができるであろう。

ところで、実際の場面では、このような方法で比較しても、結構、判断に悩む場合が多い。その場合、どう対処すれば良いのか。

思うに、殆どの場合、原因は比較要因が多すぎて思考が混乱しているからだ。

従って、思い切って要因を1つに絞ってしまうと良い。本人にとって最も重要なことか、もしくは優先度が高いものに絞って、その要因だけの順位で決めてしまうことだ。

なぜなら、それにより判断も容易となり、「割り切り」という気持ちの整理もつき易いからである。

■ 切欠きの応力・ひずみを如何に求めるか

強度評価の分野にも、比較・判断を行うべき対象が少なからずある。特に指摘しておきたい点は、切欠き部（応力集中部）の応力・ひずみの求め方についてだ。

強度問題において、構造上、切欠き部が最も危険個所になり易く、必然的に「応力・ひずみをどのように求めるか、どのようにモデル化すべきか」に焦点が当たるからである。

切り欠き部（応力集中部）の応力・ひずみを求める手段として、その対象は大きく以下の3種類になろう。

① ひずみゲージなどによる実測
② 有限要素法(FEM)により求める
③ 公称応力・ひずみに対する比率を活用する

モノが未だ無い設計段階であれば、その検討手段は主に計算モデルが採られ、それは②、③のどちらかである。

この2つを比較判断する際、その比較要因は、精度、係る人的パワー、コスト、簡便さ、などであろうか。

前節の比較方法に従えば、②は精度で◎、③は簡便さで◎といったところか。

実は、前にも触れたが、計算モデルの利用者は簡便さを重要視する傾向がある。従って、③の方法は依然として有効な手段・道具として存在している。

そんな理由で、③の方法について以下に概説しておこう。

■ 応力集中係数と切欠き係数

殆どの構造部や部品は幾何学的な不連続、又は微細構造的な不連続を有している。これらの不連続な部分、即ち、切欠き部や応力集中部は、近傍の公称応力Sより数倍も大きい応力σ_{max}が発生し易い。

弾性体に関して言えば、これらの応力比を**応力集中係数**K_t(Stress concentration factor)、又は**形状係数**(Shape factor)と言い、次のように定義されている。

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{S} \qquad (5.2.1)$$

これにより、

$$\sigma_{max} = K_t S \qquad (5.2.2)$$

となり、応力集中係数K_tを事前に把握しておけば、単純に近傍の公称応力から応力集中部の応力を求めることができる。

つまりは、有限要素法(FEM)などを使って手間をかけ詳細に計算する必要がないわけだ。

応力集中係数の値は幾何学的形状と荷重形態に影響される。幾つかの例を図表で示しておこう。

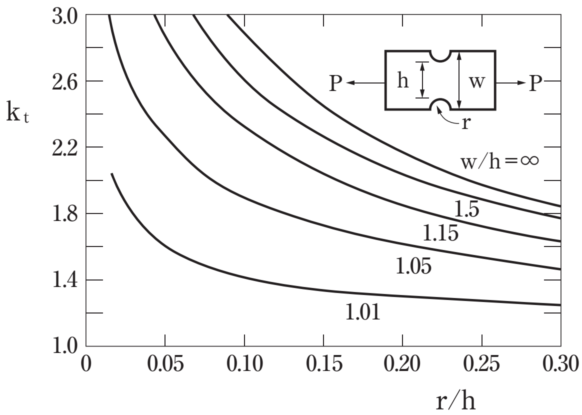

図5.1 切欠き付きの棒、引張と圧縮荷重

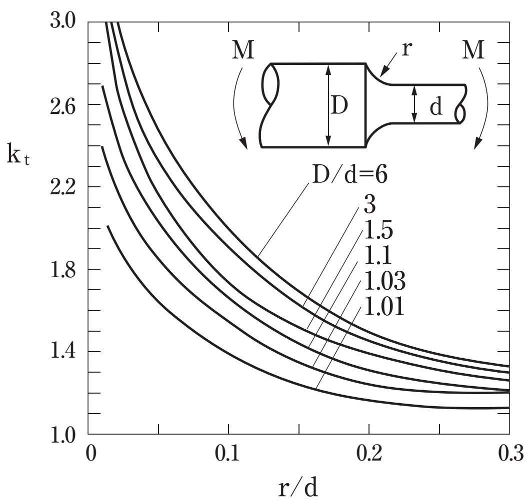

図5.2 切欠き付きの棒、曲げ荷重

図5.1は「切欠き付きの棒」に対する引張・圧縮荷重での値である。又、図5.2は「切欠き付きの丸棒」における曲げ荷重での値となる。

ここでは、2例を示すのみでお許し願いたい。他にも様々な種類の形状や荷重形態に関してデータが出回っている。
詳しくは、別途、それぞれの書籍・資料などを参照されたい。
(例えば、『応力集中　増補版』(森北出版)など)

一方、切欠き部(応力集中部)での「疲労」を扱う場合、応力集中係数とは別の概念が必要となる。なぜなら、疲労強度の場合、破断繰返し数に対する応力振幅の比較が重要となり、静的応力での比較とは別物となるからだ。

これに関して、特に、弾性体を扱っている「応力・寿命」法(S−N法)において、有意義な係数が提案されている。

それは、以下のように、疲労限度での比を採って定義された**切欠き係数**K_f(Fatigue notch factor)、又は**疲労応力集中係数** (Fatigue stress concentration factor)というものだ。

$$K_f = \frac{S_{e,\,unnotched}}{S_{e,\,notched}} \qquad (5.2.3)$$

ここで、
$S_{e,\,notched}$： 切欠き部を有する試験片での疲労限度
$S_{e,\,unnotched}$： 平滑部試験片での疲労限度
である。

念の為、応力集中係数と切欠き係数とは何が違うのか、両者の違いを述べておこう。

応力集中係数は静的強度に関係している。一方、切欠き係数は繰返し荷重による疲労強度が対象である。

そして、応力集中係数の値は、引張や曲げなどの荷重形態や切欠き部の幾何学的形状に影響してくる。対して、切欠き係数の値は荷重形態、幾何学的形状に加えて材料の種類にも影響される。

尚、一般的には切欠き係数の方が応力集中係数より小さい。又、切欠き係数の最大値は、材料にもよるが、切欠きの付け根で起こる降伏現象に伴う鈍化作用により、低めに押さえられ殆ど5〜6辺りである。

■ 切欠き感度係数は仲介役である

以上、応力集中係数と切欠き係数について述べてきた。

実は、応力集中係数と切欠き係数、この両者を結び付ける関係式を見出しておけば何かと便利である。その為に以下に示す**切欠き感度係数**(Notch Sensitive Factor)が定義された。

$$q = \frac{(K_f - 1)}{(K_t - 1)} \qquad (5.2.4)$$

言ってみれば、切欠き感度係数は応力集中係数と切欠き係数の仲介役となっている。

特に、切欠き係数が不明で応力集中係数しか分かっていない場合、この式より切欠き係数を推定できるわけである。

尚、切欠き感度係数qの値は0〜1を採り、

$K_f = 1$ で $q = 0$、

$K_f = K_t$ で $q = 1$

となる。

qは形状(切欠き半径)と材料の種類で決まってくる量である。この関連からqを導く関係式として知られている代表的なものが、以下の**ピーターソン(Peterson)の式**である。

$$q = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{a}{r}\right)} \qquad (5.2.5)$$

ここで、

r: 切欠き半径、

a: 材料定数

である。

尚、aは材料の強さと延性による量で、近似的に以下の式より求まる。

$$a = \left(\frac{262}{S_u[\mathrm{MPa}]}\right)^{1.8} \times 10^{-3}\ [\mathrm{mm}] \qquad (5.2.6)$$

更に、(5.2.4)と(5.2.5)の2式を連結すると次の式が求まる。

$$k_f = 1 + \frac{(k_t - 1)}{\left(1 + \dfrac{a}{r}\right)} \qquad (5.2.7)$$

この式より、応力集中係数から直接、K_fの値を推定できよう。

以上の切欠き係数の考えは、「応力・寿命」法(S-N法)にて広く使われている。但し、切欠き部が塑性域の場合は適用できないので留意されたい。

それでは、「応力・寿命」法での具体的な利用のイメージはどうなるのか?

それは、端的に言えば、S-N線図のラインが補正されることに相当しよう。

一つの考えは、図5.3に示すようにS_eがS_e/K_fに補正されることになる。これは、切欠き係数の定義を考えればお分かりになろう。

但し、この補正ラインの低サイクル部分は補正量が実態より少なく見積もられ、やや甘めの評価になっている。

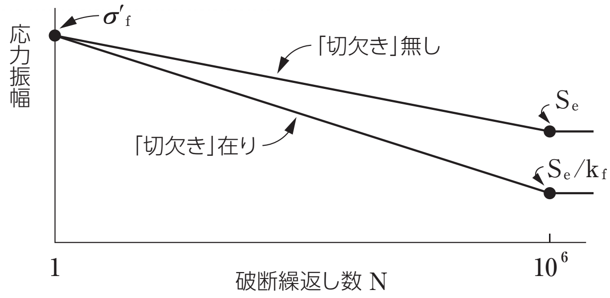

図5.3 切欠き材におけるS-N曲線の補正(1)

この甘めの評価を是正する為の他の方法も在る。それは、破断繰返し数1000での切欠き係数を求め、これを破断繰返し数1000での補正量に使って加味する方法だ。

図5.4に示すように、疲労限度10^6と1000に関する補正値を結んだラインがこれに相当する。

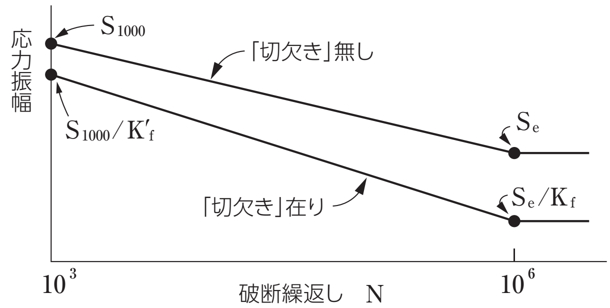

図5.4 切欠き材におけるS-N曲線の補正(2)

尚、二つの図とも、部材に発生する応力振幅は公称応力となる点に留意されたい。

■ ノイバー則 (Neuber's rule)とは何か

前節では切欠き部に関して弾性域での処理を述べたが、塑性域についてどう扱うのだろうか?

実は、弾性域と同様に物理的な関係を結び付けることができる係数が存在する。以下、それを述べよう。

先ず留意すべきは、塑性域では切欠き部局所応力と近傍の公称応力との関係を、応力集中係数K_tを介して表すことができない、という点である。

その代わりに、塑性域では以下の**塑性応力集中係数**K_σが導入された。

$$K_\sigma = \frac{\sigma}{S} \quad , \ \sigma > \sigma_y \qquad (5.2.8)$$

ここで、
σ： 局所応力
S： 近傍の公称応力
σ_y： 材料の降伏点
である。

ひずみに関しても同様な考えが採られ、塑性域では以下の**塑性ひずみ集中係数**K_εが導入された。

$$K_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{e} \qquad (5.2.9)$$

ここで
ε： 局所ひずみ
e： 近傍の公称ひずみ
である。

ここで、前述した応力集中係数K_tと塑性応力集中係数K_σ、塑性ひずみ集中係数K_εの関係を述べておこう。

先ず、K_t、K_σ、K_εに関して、弾性域と塑性域の両域での大小関係を図で表現すると**図5.5**のようになる。

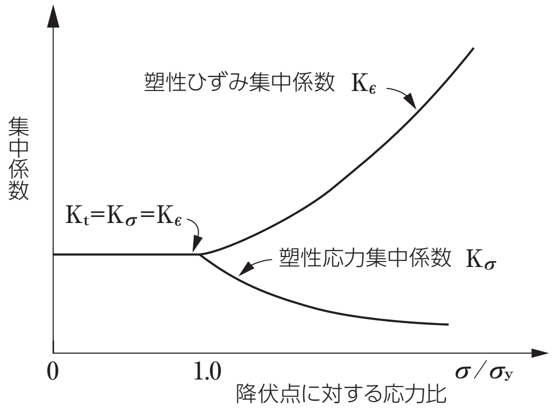

図5.5 K_σとK_εに関する降状の影響

図において、弾性域である降伏点までは$K_t = K_\sigma = K_\varepsilon$となる。

$K_t = K_\sigma$なのは説明するまでもないと思うが、$K_t = K_\varepsilon$なのは、降伏点より低い弾性域では応力とひずみが線形を保たれており、ひずみ比と応力比は同じとなるからである。

降伏点を過ぎると、K_σはK_tより減少し、一方、K_εは増加する。

そして、更に言えば、ノイバー（Neuber）という方がこの三者を観察・考察して数理的に以下の式を構築、提案した。

$$K_t = \sqrt{K_\sigma K_\varepsilon} \qquad (5.2.10)$$

この式を**ノイバー則** (Neuber's rule)という。

この式に関しては、先程の**図5.5**での三者の大小関係を観察・推測すれば直観的に「正しそうだ」と納得できるであろう。

更に、(5.2.10)式を変形すると次の式も得られる。

$$K_t^2 = K_\sigma K_\varepsilon = \frac{\sigma}{S}\frac{\varepsilon}{e} = \frac{\sigma}{S}\frac{\varepsilon E}{S} \qquad (5.2.11)$$

$$\therefore \quad \sigma\varepsilon = \frac{(K_t S)^2}{E} \qquad (5.2.12)$$

（5.2.12）式は、右辺が近傍での負荷荷重（応力）を意味し、左辺では局所（切欠き部）の応力・ひずみの関係を示している。

■ ノイバー則を使えば塑性域での切欠き部が観えてくる

さて、このノイバー則は具体的にどのように応用されるのであろうか？　1つの適用例を以下に示しておこう。

疲労問題への応用として、（5.2.12）式のK_tを切欠き係数K_fに見立て、流用してみる。
すると、（5.2.12）式は以下のように置き換えられる。

$$\therefore \quad \sigma\varepsilon = \frac{(K_f S)^2}{E} \qquad (5.2.13)$$

ここで、右辺の近傍応力Sと切欠き係数K_fは既知であり、切欠き部の応力・ひずみ$\sigma\varepsilon$が求めるべき未知量である。

とは言え、このままでは式1つで未知量が2つなので、一意的に求めることができない。
実は、前述したように繰返しを受ける疲労問題の場合、材料特性として「繰返し応力ーひずみ曲線」に従う。つまりは、切欠き部の「繰返し応力ーひずみ式」をもう1つの関係式として利用できることになる。

従って、この関連では4−3章で述べた（4.3.8）式を活用

すれば、次のように置ける。

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{E}+\left(\frac{\sigma}{K'}\right)^{\frac{1}{n'}} \qquad (5.2.14)$$

これを(5.2.13)式に代入すると

$$\left[\frac{\sigma}{E}+\left(\frac{\sigma}{K'}\right)^{\frac{1}{n'}}\right]\sigma=\frac{(K_f S)^2}{2E} \qquad (5.2.15)$$

となる。

従って、求めたい切欠き部の局所応力と局所ひずみは、この(5.2.15)と(5.2.14)式のσとεを解くことにより得られる。

この解を図で示すと、図5.6でのP$_1$に相当しよう。
図に示すように、ノイバー則の双曲線と繰返し応力ーひずみ曲線との交点となる。

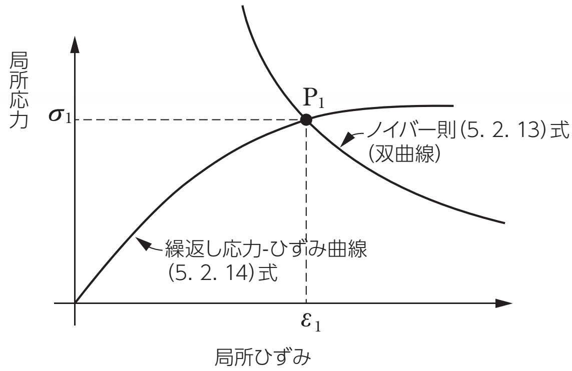

図5.6 (5.2.13)式と(5.2.14)式の交点

又、ノイバー則 は(5.2.13)式に関連して以下のようにも置ける

$$\Delta\sigma\Delta\varepsilon=\frac{(K_f\Delta S)^2}{E} \qquad (5.2.16)$$

これは、近傍の応力振幅に対する切欠き部の局所応力と局所ひずみの応答、と観ることができる。
右辺が既知量で左辺が未知量である。

左辺の$\Delta\sigma\Delta\varepsilon$を求める為、ヒステリシスループの式を利用しよう。前述した(4.4.2)式より、

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2}=\frac{\Delta\sigma}{2E}+\left(\frac{\Delta\sigma}{2K'}\right)^{\frac{1}{n'}} \qquad (5.2.17)$$

を使い、これと(5.2.16)式と結合すると以下の式が得られる。

$$\frac{\Delta\sigma^2}{2E}+\Delta\sigma\left(\frac{\Delta\sigma}{2K'}\right)^{\frac{1}{n'}}=\frac{(K_f\Delta S)^2}{2E} \qquad (5.2.18)$$

(5.2.18)と(5.2.17)式より、ヒステリシスループでの$\Delta\sigma\Delta\varepsilon$が得られる。

これを図で示すと、図5.7でのP$_1$とP$_2$で構成されるヒステリシスループの幅に相当しよう。

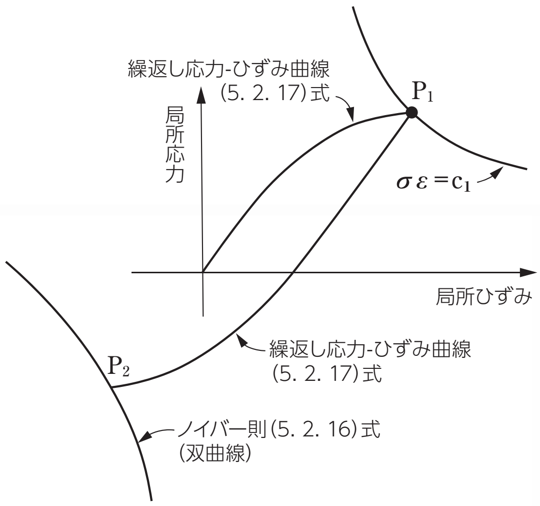

図5.7 (5.2.16)式と(5.2.17)式の交点幅

このように、疲労問題に対してノイバー則を活用することで、塑性域となっている切欠き部の応力・ひずみ状態を求めることができる。

尚、ご承知かと思うが、ここでの適用例は「ひずみー寿命」法での計算ステップ(P.45)<4>に該当することを付記しておく。